Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a XII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln\left(x^2+1\right)+a\cdot x$ are derivate

$g'(x)=\dfrac{2\cdot x}{x^2+1}+a=\dfrac{a\cdot x^2+2\cdot x+a}{x^2+1},\forall x\in\mathbb{R}$.

Numărătorul are $\Delta=4-4\cdot a^2<0,$ pentru $a\in(1,+\infty)$, deci $a\cdot x^2+2\cdot x+a>0,\forall x\in\mathbb{R}$ şi $a\in(1,+\infty)$.

Obţinem astfel $g'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci g este strict crescătoare.

Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=+\infty$, iar g este strict crescătoare rezultă că g este bijectivă, deci şi inversabilă.

Din ipoteză avem că $g\left(f(x)\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ şi ţinând cont că g este inversabilă rezultă că $g^{-1}=f$.

Cum g este continuă rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive.

b) Pentru $x=a$ şi $y=b$ în relaţia din enunţ rezultă că $a\cdot(b\cdot a)=b$, ceea ce arată că $b\cdot a$ este soluţie a ecuaţiei $a\cdot x=b$. Fie c o soluţie a acestei ecuaţii, deci $a\cdot c=b\quad(1)$

Dacă în condiţia impusă în enunţ punem, $x=c$ şi $y=a$ deducem $c\cdot(a\cdot c)=a$ şi deci conform cu (1), rezultă $c\cdot b=a\quad(2)$.

Pentru $x=b$ şi $y=c$ în relaţia din enunţ rezultă că $b\cdot(c\cdot b)=c$ şi dacă ţinem seama de (2), deducem $b\cdot a=c$, iar aceasta ne arată că unica soluţie a ecuaţiei $a\cdot x=b$ este $c=b\cdot a$.

Demonstrăm că $(x\cdot y)\cdot x=y,\forall x,y\in M\qquad(3)$

Înlocuind în relaţia din enunţ pe x cu $x\cdot y$ rezultă că $(x\cdot y)\cdot\left(y\cdot(x\cdot y)\right)=y\qquad(4)$

şi dacă ţinem seama că $y\cdot(x\cdot y)=x$, din (4) deducem relaţia (3).

Folosind relaţia (3) şi procedând ca şi pentru ecuaţia $a\cdot x=b$, se demonstrează că ecuaţia $x\cdot a=b$ are o soluţie unică $a\cdot b$.

Problema 2.

Soluţie. a) Pentru $y=0$ în relaţia (1), avem $2\cdot f(x)=2\cdot f(x)\cdot g(0),\forall x\in\mathbb{R}$. Cum f este neidentic nulă rezultă că $g(0)=1$.

Din relaţia (2), pentru $y=0$, obţinem $0=2\cdot f(x)\cdot f(0),\forall x\in\mathbb{R}$, care implică $f(0)=0$.

Luând $x=0$ în relaţia (1), avem $f(y)+f(-y)=0,\forall y\in\mathbb{R}$, adică f funcţie impară.

Pentru $x=0$ în relaţia (2), avem $g(-y)-g(y)=0,\forall y\in\mathbb{R}$, deci funcţia g este pară.

Schimbând x şi y între ele în relaţia (1) rezultă că $f(x+y)+f(y-x)=2\cdot f(y)\cdot g(x),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Adunând cu relația (1), obținem relația (3): $f(x+y)=f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

Demonstrăm implicația directă :

Admitem că f este periodică şi considerăm T o perioadă a sa: $f(x+T)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Deoarece $f(0)=0$ rezultă că $f(T)=0$.

În relația (3), luăm $y=T$ şi rezultă $f(x)=f(x)\cdot g(T),\forall x\in\mathbb{R}$, adică $g(T)=1$.

Pentru $x=y$, în relațiile (3), respectiv (2) obținem relațiile:

(4): $f(2\cdot x)=2\cdot f(x)\cdot g(x),\forall x\in\mathbb{R}$

(5): $g(2\cdot x)=1-2\cdot f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

Din relația (5), pentru $x=\frac{T}{2}$ obținem $g(T)=1-2\cdot f^2\left(\frac{T}{2}\right)$, de unde $f\left(\frac{T}{2}\right)=0$.

În relația (2) trecem x în $x+\frac{T}{2}$ şi y în $\frac{T}{2}$ şi rezultă $g(x)=g(x+T),\forall x\in\mathbb{R}$.

Demonstrăm reciproca:

Presupunem că g este periodică şi T este o perioadă a sa.

Deci $g(x+T)=g(x),\forall x\in\mathbb{R}$, de unde $g(T)=1$.

Pentru $x=T$ în relația (5), avem că $g(2\cdot T)=1-2\cdot f^2(T)$, de unde rezultă $f(T)=0$.

Din relația (3), pentru $y=T$ obținem $f(x+T)=f(x)\cdot g(T)+f(T)\cdot g(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Din modul de demonstrație rezultă că mulțimile perioadelor sunt egale.

b) Fie $x_0\in\mathbb{R}$

Avem $R(f;\,x_0;\,h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0)\cdot g(h)+f(h)\cdot g(x_0)-f(x_0)}{h}$

$R(f;\,x_0;\,h)=f(x_0)\frac{g(h)-1}{h}+\frac{f(h)}{h}\cdot g(x_0)$

Ținând cont de relația (5) rezultă că

$R(f;\,x_0;\,h)=f(x_0)\frac{-2\cdot f^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}+\frac{f(h)}{h}\cdot g(x_0)$

$\lim\limits_{h\to 0}R(f;x_0;h)=g(x_0)$. Deci $f'(x_0)=g(x_0)$.

$R(g;\,x_0;\,h)=\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{-2\cdot f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot f\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$

Deoarece f este continuă în x_0 rezultă că $\lim\limits_{h\to 0}R(g;x_0;h)=-f(x_0)$, adică $g'(x_0)=-f(x_0)$.

Problema 3

Soluție. a) Fie $a_1<a_2<x<a<a_3$. Din convexitate rezultă

$\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}\le\frac{f(a)-f(x)}{a-x}\le\frac{f(a_3)-f(a)}{a_3-a}$, deci

$(a-x)\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} \le f(a)-f(x) \le (a-x)\frac{f(a_3)-f(a)}{a_3-a}$, de unde $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)=f(a)$.

Analog $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)=f(a)$.

b) Ceea ce se cere este echivalent cu faptul că $f(a+x)-f(x)=-x$,ca ecuație în x, admite o soluție unică $g(a)$ pentru orice $a \ge 0$. Să definim $f_a(x)=f(a+x)-f(x)$ pentru $a \ge 0$.

Demonstrăm că f_a este monoton crescătoare:

1) Fie $x_1 < x_1 + a < x_2 < x_2 + a$, $a > 0$. Cum f este convexă rezultă
$\frac{f(x_1+a)-f(x_1)}{a} \le \frac{f(x_2+a)-f(x_2)}{a}$, de unde $f_a(x_2) \ge f_a(x_1)$
2) Fie $x_1 < x_2 < x_1 + a < x_2 + a$. Cum f este convexă rezultă
$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2+a)-f(x_1+a)}{x_2-x_1}$, de unde $f_a(x_2) \ge f_a(x_1)$

Deci f_a este monoton crescătoare.

Ecuația devine $f_a(x)+x=0,\ a \ge 0$. Definim $h_a(x)=f_a(x)+x$ pentru $a \ge 0$.

Demonstrăm că ecuația $h_a(x)=0$ are soluție în intervalul $\left[-|f_a(0)|;|f_a(0)|\right]$.

Avem $h_a\left(-|f_a(0)|\right)=f_a\left(-|f_a(0)|\right)+\left(-|f_a(0)|\right) \le f_a(0)-|f_a(0)| \le 0$ şi

$h_a\left(|f_a(0)|\right)=f_a\left(|f_a(0)|\right)+\left(|f_a(0)|\right) \ge f_a(0)+|f_a(0)| \ge 0$

Cum h_a este continuă, ea se anulează în cel puțin un punct x_a.

Soluția va fi unică deoarece dacă presupunem că $x_1 < x_2$ sunt soluții, avem

$0=f_a(x_1)+x_1=f_a(x_2)+x_2$, deci $0 \le f_a(x_2)-f_a(x_1)=x_1-x_2<0$, absurd.

Aşadar, soluția unică x_a determină, în mod unic funcția g.